НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

імені Ігоря Сікорського»

Факультет прикладної математики

Кафедра прикладної математики

Курсова робота

з предмету «Математичне Моделювання»

«Моделювання росту чисельності ізольованих популяцій. Модель Хатчинсона»

Виконав: Перевірив:

студент групи КМ-12 асистент Мазурик Р. В.

Лазебний О. А.

Київ — 2024

ЗМІСТ

Зміст

[1 Постановка задачі 3](#_Toc186210082)

[1.1 Змістовна постановка задачі 3](#_Toc186210083)

[1.2 Концептуальна постановка задачі 3](#_Toc186210084)

[1.3 Математична постановка задачі 4](#_Toc186210085)

[Висновки 7](#_Toc186210086)

[Список використаних джерел 9](#_Toc186210087)

# 1 Постановка задачі

## 1.1 Змістовна постановка задачі

Розробити математичну модель, що дозволяє описати процес зростання чисельності ізольованої популяції.

Модель має дозволяти:

* Обчислювати чисельність популяції будь-якої миті часу з заданого часового проміжку.
* Будувати графіки чисельності популяції для різних значень параметрів.

Вхідні дані: кінець часового проміжку, початкова чисельність популяції, коефіцієнт лінійного зростання, ємність середовища, запізнення.

## 1.2 Концептуальна постановка задачі

Зростання чисельності ізольованих популяцій можна змоделювати відповідно до *моделі Хатчинсона*: модифікації логістичної моделі, в рамках якої врахований ефект *запізнення*.

Приймемо такі гіпотези:

* Об'єктом моделювання є чисельність популяції з плином часу . Від початкового моменту часу до кінцевого – .
* Середовищем в якому існує популяція має ємність , що визначається доступною кількістю ресурсів.
* Під час зростання чисельності популяції має місце запізнення - поточний стан популяції впливає на її динаміку через певний часовий проміжок .

Це враховує такі природні фактори, як час статевого дозрівання або затримку між моментом зачаття і народженням.

* Нехтуємо непередбачуваними зовнішніми або внутрішніми факторами запізнення/збільшення чисельності популяції (наприклад, війни, стихійні лиха, епідемії). Єдиним фактором, що враховується - є запізнення.

Відповідно до вищеописаних гіпотез ***концептуальну постановку задачі*** можна представити у такому вигляді:

*Визначити функцію зростання ізольованої популяції на обмеженому часовому проміжку від до , враховуючи що відомі такі показники як: коефіцієнт лінійного зростання , ємність середовища та коефіцієнт запізнення .*

## 1.3 Математична постановка задачі

Знайти залежність чисельності ізольованої популяції від часу - з вирішення диференційного рівняння Хатчинсона:

Початкова умова:

де – неперервна функція.

В даній задачі за таку функцію було обрано періодичну функцію косинуса від малого значення аргумента, оскільки косинус значення, що прямує до 0, дорівнюватиме 1, відповідно домножене значення на буде моделювати коливання чисельності популяції близько до початкового значення на відрізку :

де – початкова чисельність населення.

1.4 Вибір та обґрунтування вибору методу розв'язання задачі

Оскільки аналітично розв'язання заданого в математичній постановці задачі диференційного рівняння знайти складно, досить часто використовують чисельні методи, наприклад, метод Ейлера або метод Рунге-Кутти.

В даній роботі, буде використаний метод Рунге-Кутти 4 порядку.

Метод Рунге-Кутти 4-го порядку використовується для чисельного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь (ODE). Для задач з затримкою, як в даному випадку, де необхідно враховувати значення , процедура інтегрування складається з таких кроків:

1. Ініціалізація. Для часу встановлюється початкова умова:
2. Визначення коефіцієнтів Рунге-Кутти:  
   Для кожного кроку часу обчислюється чотири коефіцієнти , які використовуються для апроксимації розв’язку на наступному кроці.
3. Формули Коефіцієнтів:
   * Формула для оновлення значення виглядає так:
4. Робота з затримкою:

Для кожного часу використовується значення популяції , яке визначається через значення на попередніх кроках (або через початкову умову коли ).

# 2 Основна частина

## 2.1 Теоретичні відомості

2.1.1 Модель Мальтуса

Нехай маємо деякий біологічний вид, для якого існує необмежений запас використовуваних ресурсів. Позначимо чисельність популяції в момент часу через , тоді швидкість її зміни може бути подана як:

У простішому випадку розглядається відсутність міграції та припускається, що народжуваність і смертність відбувається пропорційно загальній чисельності, тоді:

де - коефіцієнт народжуваності, - коефіцієнт смертності, - коефіцієнт швидкості розмноження популяції.

Розв'язком рівняння () при є експоненціальна функція:

де – це чисельність популяції в початковий момент часу .

* + - Якщо , то популяція росте з експоненціальним ростом
    - Якщо , то популяція вимирає
    - Величину ще називають біологічним потенціалом популяції або мультузіанським параметром популяції.

Експоненціальний характер зростання чисельності популяції часто проявляється за природних умов у короткочасні періоди, коли є достатньо їжі, немає скупченості, відсутні хижаки-вороги.

**Помилка мальтуса**. Якщо припустити, що ріст народонаселення мав завжди таку ж швидкість, що й зараз (подвоєння кількості за 40 років), то отримаємо висновок, що людство існує лише 32 покоління (близько 1300 років).

**Де модель можна використовувати.** Модель Мальтуса може бути застосовна на певних етапах (на обмежених часових інтервалах) до широкого класу динамічних процесів, які, насамперед, спостерігаються у лабораторних умовах:

ріст мікробів, дріжджів, бактерій при наявності достатньої кількості поживних ресурсів у середовищі.

Зображення, що містить текст, ряд, Графік, схема

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.1.1.1 – Графік Мальтузіанської моделі росту популяції

2.1.2 Модель Ферхюльста

Модель Мальтуса розглядалася, коли для розмноження популяції створені найсприятливіші умови і відсутні лімітуючі фактори. Проте сприятливі для розмноження умови не можуть довго існувати через вплив навколишнього середовища, присутність ворогів та інших несприятливих факторів, що значно зменшує швидкість зростання її чисельності.

У моделі Мальтуса для чисельності особин в ізольованій популяції при нерівних коефіцієнтах народжуваності та смертності існують лише дві альтернативи: або нескінченний ріст, або виродження.

Оскільки в реальній дійсності спостерігається стабілізація чисельності популяції на деякому рівні, то необхідно розглядати математичні моделі, в яких густина популяції відіграє важливу роль, тобто коефіцієнт розмноження в такій моделі не постійний, а залежить від чисельності особин у популяції. Отже, точніша математична модель вигляду:

де коефіцієнт швидкості відтворення популяції.

Розкладаючи функцію у ряд Тейлора, в околі нуля та залишаючи тільки лінійні члени, прийдемо до рівняння:

де і – деякі сталі, причому природно припустити, що і .

Модель Ферхюльста:

де , - додатні константи:

* задає коефіцієнт природного відтворення - мальтузіанський параметр;
* інтерпретується як потенціальна ємність екологічного середовища, яка визначається доступною кількістю ресурсів.

Модель уже враховує внутрішньовидову конкуренцію та дію лімітуючих факторів (нестача їжі, площі, світла).

Розв'язок рівняння (2.1.2.3) при початковій умові має вигляд:

– визначає граничне значення чисельності популяції (чисельність не зростає безмежно, а обмежена зверху).

На відміну від моделі Хатчинсона, в моделі Ферхюльста - не важливо які значення приймають параметри та в рамках області визначення, функція - буде логістичною.

2.1.3 Модель Хатчинсона

Недоліком логістичної моделі є використання миттєвих значень

народжуваності та смертності, що визначаються станом популяції

в певний момент часу.

Насправді народжуваність залежить від чисельності популяції в попередні

моменти часу, тому що, наприклад, існує проміжок часу між моментами

зачаття і народжування. Час статевого дозрівання теж зумовлює фактор

запізнення.

Смертність більшою мірою залежить від стану популяції в певний момент

часу. Тоді логістичне рівняння переходить у рівняння із запізнюючим

аргументом вигляду:

Таке рівняння називається *рівнянням Хатчинсона* (Hutchinson, 1948). Тут - коефіцієнт лінійного росту (мальтузіанський параметр), – середня чисельність у популяції (ємність популяції), – запізнення.

Рівняння (2.1.3.1) можна одержати ще й із таких міркувань. У реальній екосистемі ресурси самовідновлюються. Тому реальний рівень ресурсів, доступних у момент часу , залежатиме від щільності виду в момент , де – час розвитку виду, який служить ресурсом.

Для замикання рівняння (2.1.3.1) необхідно задати початкову умову:

де – неперервна функція.

Розв'язок такої задачі існує, причому єдиний.

При нетривіальна рівновага в рівнянні із запізненням стійка (як і без запізнення).

2.2 Комп’ютерна реалізація моделі Хатчинсона.

Комп’ютерна реалізація моделі Хатчинсона представлена у вигляді програмного коду на мові програмування Python. Реалізація використовує метод Рунге-Кутта четвертого порядку (RK4) для чисельного розв’язку рівняння із затримкою. У рамках реалізації враховується початкова функція , що визначається значенням ​ та періодичною функцією косинусу з аргументом близьким до 0, що дозволяє моделювати історію значень популяції для інтервалу часу для .

**Основні етапи реалізації:**

1. **Визначення початкової функції історії**.
2. **Отримання затриманого значення** : Для коректного обчислення затриманого значення враховується історична функція на початковому інтервалі часу.
3. **Опис правої частини рівняння Хатчинсона**.
4. **Чисельне розв’язання рівняння методом Рунге-Кутта**: Реалізація включає дискретизацію часу з кроком та урахуванням запізнення . Алгоритм ітераційно обчислює значення популяції для кожного моменту часу.
5. **Візуалізація результатів**: Для побудови графіків динаміки популяції використовується бібліотека *Matplotlib*. Реалізовано інтерактивний інтерфейс, що дозволяє змінювати параметри моделі.
6. **Інтерактивна візуалізація**: За допомогою віджету *interact* користувач може змінювати параметри ​ та максимальний час симуляції :

Скріншот інтерфейсу програми зображений на рисунку 2.2.1. Графіки змінюються в реальному часі – зі зміною повзунків (або введенням значень), що відповідають конкретним параметрам.

Оскільки мінімальні і максимальні значення параметрів визначаються в реалізації програми (відповідній комірці середовища Jupyter Notebook), має місце перевірка на коректне введення. Окрім того, у випадку відсутності стабільності розв’язку (розв’язок не прямує до ), в інтерфейсі буде виведене попередження про те, що це відбувається через те, що параметри та були підібрані так, що .

Зображення, що містить текст, Графік, схема, ряд

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.2.1 – Скріншот роботи програмної реалізації

2.3 Аналіз особливостей результатів в залежності від зміни параметрів та

2.3.1 Робота моделі при малих значеннях запізнення та малому значенні ємності середовища.

На рисунку 2.3.1.1 можна помітити, що для малої ємності середовища, та малого значення запізнення, зі зміною параметра немає особливих змін.

Чисельність населення стрімко зростає за короткий проміжок часу. Чим більший коефіцієнт лінійного приросту - тим більш стрімко відбувається стабілізація кількості населення до кількості - рівній максимальній ємкості середовища.

Зображення, що містить текст, ряд, Графік, схема

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.3.3.1 – Графіки роботи моделі при малих значеннях запізнення та малому значенні ємності середовища для різних значень .

Для поданих на рисунку 2.3.1.2 графіків, спостерігається аналогічна ситуація:

* При низькій початковій чисельності, населення стрімко зростає і закріплюється на позначці ємності середовища
* При високі початковій чисельності, але малому показникові ємності середовища, спостерігається стрімке падіння чисельності, та закріплення на показнику максимальної ємності.
* При ще більшій початковій чисельності, падіння чисельності населення відбувається більш стрімкими темпами на відрізку .

Зображення, що містить ряд, Графік, схема, текст

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.3.1.2 – Графіки роботи моделі при малих значеннях запізнення та малому значенні ємності середовища для різних значень .

2.3.2 Робота моделі при великих значеннях запізнення та малому значенні ємності середовища.

Судячи з графіків з рисунку 2.3.2.1, при великих значеннях запізнення та малому значенні ємності середовища, спостерігається така ситуація:

* При відносно невеликому значенні параметру лінійного зростання в певний момент часу (в даному випадку ) показник кількості населення популяції збігається до значення ємкості середовища .
* При збільшенні параметру на 0.05 графік демонструє поведінку хвилі, це можна пояснити тим, що через велике значення показника запізнення, періодично виходить так, що старі представники популяції - помирають, а молоді, ще не є достатньо зрілими, для розмноження.
* При збільшенні параметру ще на 0.14 можна помітити, що чисельність популяції в певний момент (після 190) досягне показника 0, що відповідає нульовій кількості зрілого (дорослого) населення.

Зображення, що містить ряд, текст, Графік, схема

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.3.2.1 – Графіки роботи моделі при великих значеннях запізнення та малому значенні ємності середовища для різних значень .

В свою чергу, при фіксованому значенні , та зміні початкової чисельності популяції, особливих змін не було помічено. З графіків рисунку 2.3.2.2 видно, що кількість зрілих представників популяції коливається:

* В першому випадку, коли початкова чисельність менша за ємність середовища, - амплітуда поступово зменшується.
* В другому випадку, коли початкова чисельність більша, але на одиницю, - аналогічно з першим випадком.
* В третьому, коли початкова чисельність набагато більша за ємність - спостерігається період, під час якого кількість зрілого населення є дуже малою (від 20 до 50 часових кроків), що можна пояснити високою смертністю серед зрілого населення в короткий час, через невідповідність ємності середовища та кількості населення - (недостатньо ресурсів, смертність від голоду, хвороб тощо).

Зображення, що містить текст, ряд, Шрифт, Графік

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.3.2.2 – Графіки роботи моделі при великих значеннях затримки та малому значенні ємності середовища для різних значень .

2.3.3 Велика ємність середовища, мале запізнення (1 крок)

В більш загальному сенсі, від збільшення ємності середовища, результат не зазнав особливих змін, поведінка графіків ф-її (див. рисунок 2.3.3.1) схожа на графіки з малою ємністю середовища. Але основна відмінність полягає в тому, що популяція досягає верхньої, обмежувальної відмітки - ємності середовища - набагато довше ніж, коли показник ємності є малим.

В даному випадку, можна помітити, що зі збільшенням значення параметра - темпи зростання чисельності населення збільшуються, як і має бути.

* На першому графіку відмітки було досягнено за - 125 років (одиниць часу).
* На другому - за 75 років (одиниць часу).
* А на третьому - за 50 років (одиниць часу).

Зображення, що містить текст, ряд, Графік, число

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.3.2.3 – Графіки роботи моделі при малих значеннях запізнення та великому значенні ємності середовища для різних значень .

На великій максимальній ємності середовища, зі зміною початкової кількості населення (рисунок 2.3.3.2) - модель працює так само як в пункті 2.3.1. Робота моделі при малих значеннях затримки та малому значенні ємності середовища.

Зображення, що містить текст, ряд, Графік, схема

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.3.2.2 – Графіки роботи моделі при малих значеннях запізнення та великому значенні ємності середовища для різних значень .

2.3.4 Велика ємність середовища, велике запізнення

На рисунку 2.3.4.1, при великих показниках обох параметрів: запізнення та ємності середовища, мають місце такі особливості:

* На першому графіку, на початку чисельність населення поступово зростає, через досить низький показник лінійного приросту , досягає піку чисельності населення, вищого за ємність середовища, тому поступово спадає, і стабілізується до показника максимальної ємності .
* На другому графіку спостерігаємо хвилі збільшення та зменшення зрілого населення, через високе значення параметру запізнення . Можна помітити, що при відносно середньому значенню показника амплітуда коливань чисельності населення стає все меншою і меншою з часом.
* На третьому графіку, при більшому значенні показника - спостерігається стрімкий але поступовий зріст населення до пікової точки - що є в 8 разів більшою за ємність середовища, після чого спостерігається стрімкий спад кількості зрілого населення до нуля. Оскільки , так і має бути.

Зображення, що містить текст, ряд, Графік, Шрифт

Автоматично згенерований опис

8

На рисунку 2.3.4.2 можна побачити, що для великої ємності середовища зі зміною початкової чисельності населення, висновки аналогічні до отриманих в пт. 2.3.2 Робота моделі при великих значеннях запізнення та малому значенні ємності середовища.

*Зображення, що містить текст, ряд, Шрифт, число

Автоматично згенерований опис*

9

2.4 Перевірка моделі на адекватність

Перевірка проводитиметься порівнянням роботи моделі для різних наборів параметрів, враховуючи, те що відомо про модель:

2.4.1 При , випадок нульового запізнення.

При нульовому запізненні, модель вироджується в модель Ферхюльста, що можна побачити на рисунку 2.5.1.1.

Зображення, що містить текст, ряд, схема, Графік

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.5.1.1 Валідація моделі для

2.4.2 Помірне запізнення.

З Рисунку 2.4.1.2 видно, як відбувається стабілізація розв’язку до значення . Що свідчить про адекватну роботу моделі у даному випадку.

Зображення, що містить текст, ряд, Графік, схема

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.4.1.2 Валідація моделі для набору параметрів:

2.4.3 Високе запізнення з періодичними коливаннями

Як можна побачити з рисунку 2.4.1.3, мають місце високі коливання навколо , які не затухають. Амплітуди коливань залишаються обмеженими (в межах 1000). Періодичність видно на графіку. Комп’ютерна реалізація виводить на графіку помітку, про те результат не стабілізується, що пов’язано з тим, що . Оскільки для такого набору параметрів передбачений такий результат, комп'ютерну реалізацію моделі можна вважати адекватною.

Зображення, що містить текст, схема, ряд, Графік

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.4.1.3 Валідація моделі для набору параметрів:

2.4.4 Висока швидкість зростання (мальтузіанський параметр ) зі стабільністю

**Очікувані результати:**

* Швидка стабілізація на рівні KKK.
* Мінімальні осциляції через невелике значення .
* за .

Як можна побачити з рисунку 2.4.4.1 – модель поводиться очікувано.

Зображення, що містить текст, ряд, схема, Графік

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.4.4.1 Валідація моделі для набору параметрів:

Оскільки не було помічено негативних значень функції , та інших проявів неадекватної поведінки моделі для різних наборів параметрів, можна вважати, що модель пройшла етап валідації (перевірки на адекватність).

2.5 Порівняння з іншими моделями

Для порівняння з іншими моделями, були використані набори параметрів з перевірки на адекватність. Параметри інших моделей (див. рисунки 2.5.1-2.5.4) були підібрані таким чином:

* Параметри моделі Ферхюльста (Логістичної моделі) – такі ж як у моделі Хатчинсона.
* Параметри моделі Мальтуса, а саме мальтузіанського параметру були підібрані таким чином, щоб графік міг бути розміщений на одному графіку з графіками інших моделей.

Зображення, що містить текст, ряд, Графік, схема

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.5.1 Порівняння моделей чисельного росту популяції.   
В моделі Хатчинсона .

Зображення, що містить текст, ряд, Графік, схема

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.5.2 Порівняння моделей чисельного росту популяції.   
В моделі Хатчинсона помірне запізнення .

Зображення, що містить текст, ряд, Графік, схема

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.5.3 Порівняння моделей чисельного росту популяції.   
В моделі Хатчинсона високе запізнення.

Зображення, що містить текст, ряд, Графік, схема

Автоматично згенерований опис

Рисунок 2.5.4 Порівняння моделей чисельного росту популяції.   
В моделі Хатчинсона мале запізнення, висока швидкість зростання.

# Висновки

У даній курсовій роботі було проведено дослідження математичного моделювання росту чисельності ізольованих популяцій, з особливим фокусом на модель Хатчинсона. Робота включала як теоретичний аналіз моделі, так і її практичну реалізацію з подальшим порівнянням з іншими класичними моделями популяційної динаміки.

Теоретична частина дослідження показала, що модель Хатчинсона є суттєвим удосконаленням логістичної моделі завдяки врахуванню ефекту запізнення τ, що відображає біологічно важливий час між зачаттям і народженням, а також період статевого дозрівання особин. Математичний аналіз моделі виявив, що при 0 < a₁ < π/2 (де a₁ = rτ) нетривіальна рівновага в рівнянні із запізненням є стійкою.

*В ході комп'ютерного моделювання було досліджено поведінку системи при різних комбінаціях параметрів та виявлено наступні закономірності:*

1. При малих значеннях запізнення τ та малій ємності середовища K
   * Система швидко досягає стану рівноваги
   * Збільшення коефіцієнта r прискорює досягнення рівноважного стану
   * Поведінка системи наближається до логістичної моделі
   * Початкова чисельність популяції суттєво впливає лише на швидкість досягнення рівноваги
2. При великій ємності середовища *K* та малому τ:
   * Збільшення r прискорює досягнення рівноваги.
   * Динаміка зберігає характер логістичної кривої.
3. При великих значеннях запізнення τ:
   * Виникають коливання чисельності популяції через ефект запізнення.
   * Збільшення параметра r може призвести до вимирання статево зрілої частки популяції.
   * При певних значеннях параметрів спостерігається хвилеподібна динаміка.
   * Амплітуда коливань може поступово зменшуватись.

*Порівняльний аналіз з іншими моделями показав:*

* Модель Мальтуса описує необмежене експоненційне зростання, що рідко спостерігається в природі та не враховує обмеженість ресурсів.
* Модель Ферхюльста враховує обмеженість ресурсів, але ігнорує ефект запізнення.
* Модель Хатчинсона при *τ = 0* вироджується в модель Ферхюльста.
* При τ > 0 модель Хатчинсона може демонструвати складнішу динаміку, включаючи коливання та нестійкість.

Проведене дослідження підтверджує, що модель Хатчинсона є найбільш досконалим інструментом серед розглянутих моделей для опису динаміки реальних популяцій, оскільки враховує важливі біологічні параметри (час дозрівання, затримку розмноження).

Реалізована комп'ютерна модель може бути використана для подальших досліджень у галузі популяційної екології та для прогнозування динаміки реальних популяцій при відомих параметрах системи.

# Список використаних джерел

1. Маценко В . Г . Математичне моделювання: навчальний посібник c. 323 – 329.